Feladatok egyszámjátékra

1. Hárman egyszámjátékot játszanak. Mindegyikük egyet, kettőt vagy hármat mond. Az nyer, aki a legkisebb számot mondja egyedül. Aki nyer, az kap a másik két játékostól egy-egy dollárt. Ti hogyan játszanátok?
   Ha valaki egyszerű taktikát alkalmaz, akkor hamar kiismerhetik a többiek, és tudnak rá reagálni. Elég gyorsan rájöhetünk, hogy kevert stratégiát érdemes alkalmazni. Előre eldöntjük, hogy az egyes számokat milyen gyakorisággal szeretnénk mondani, de nem szeretnénk, hogy ki lehessen találni, hogy mit mondunk legközelebb. Például, ha úgy döntünk, hogy kb a játékok felében mondunk egyet, harmadában kettőt és hatodrészben hármat, akkor ezt egy dobókockával könnyen megoldhatjuk. Ha a dobott szám egy, kettő vagy három, akkor egyet mondunk, ha négyet, vagy ötöt dobunk akkor kettest mondunk, és ha hatost dobunk, akkor hármat mondunk.

   Az , , arány két pénzérme feldobásával könnyedén biztosítható.
2. Hárman egyszámjátékot játszanak. Mindegyikük $\frac{1}{3}$ valószínűséggel mond egyet, kettőt vagy hármat. Aki nyer, az kap a másik két játékostól egy-egy dollárt..
   Igazságos-e ez a játék?
   Ha a játékosokat „A”-val „B”-vel és „C”-vel jelöljük, akkor ezt a játékot a következő egyszerű táblázattal jellemezhetjük:

	A	B	C
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$P(\emptyset)=3(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{9}$, $P(A)=PB)=P(C)=\frac{8}{27}$

$M(A)=M(B)=M(C)=0$

A játék igazságos.

3. Az egyik játékos óvatosan eltér az eredeti stratégiától. Kicsit gyakrabban mond egyest, így próbál előnyhöz jutni. Hogyan alakul ebben az esetben a játékosok egy játékra eső átlagos nyereménye? A pontos számokat a táblázat mutatja:

	A	B	C
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Nézzük a negyedik feladatot általánosan

	A	B	C
1	p_1	q_1	r_1
2	p_2	q_2	r_2
3	p_3	q_3	r_3

Ahol p_i, q_i, $r_i \geq 0$ és $p_1+p_2+p_3=1$, $q_1+q_2+q_3=1$, $r_1+r_2+r_3=1$.
Egy játékos háromféle módon nyerhet: a, ha egyet mond és a többiek kettőt vagy hármat, b, ha kettőt mond a többiek pedig vagy mindketten egyet vagy mindketten hármat mondanak. c, ha hármat mond és a többiek vagy mindketten egyet vagy mindketten kettőt mondanak.

$P(A)=p_1(q_2+q_3)(r_2+r_3)+p_2(q_1r_1+q_3r_3)+p_3(q_1r_1+p_2r_2)=\frac{12}{36}$

$P(B)= q_1(p_2+p_3)(r_2+r_3)+q_2(p_1r_1+p_3r_3)+q_3(p_1r_1+p_2r_2)=\frac{10}{36}$

$P(C)= r_1(p_2+p_3)(q_2+q_3)+r_2(p_1q_1+p_3q_3)+r_3(p_1q_1+p_2q_2)= \frac{10}{36}$

Senki nem nyer, ha mindhárman ugyan azt a számot mondják.

$P(\varnothing)=p_1q_1r_1+p_2q_2r_2+p_3q_3r_3=\frac{4}{36}$

Kiszámíthatjuk a játékosok egy játékra jutó átlagos nyereményét. Itt lényegében egy valószínűségi változó várható értékét számítjuk ki. Egy játékos szempontjából a valószínűségi változó lehetséges értékei : +2, ha nyer, -1, ha veszít és nulla, ha döntetlen születik. Az egyszerűség kedvéért a várható értéket M-mel jelöljük és a zárójelben annak a játékosnak a nevét tüntetjük fel, akinek az átlagos nyereményét számoljuk.

$M(A)=2P(A)-1P(B)-1P(C) +0P(\varnothing)=\frac{1}{9}$

$M(B)= -1P(A)+2P(B)-1P(C) +0P(\varnothing)=-\frac{1}{18}$

$M(C)= -1P(A)-1P(B)+2P(C) +0P(\varnothing)=-\frac{1}{18}$

Ez az jelenti, hogy hosszabb távon 18 játékonként A 2 dollárt nyer, a B és C pedig egy-egy dollárt vesztenek.

5. feladat
Az egyik játékos vérszemet kap, és úgy dönt, hogy minden játékban egyest fog mondani (dúvadként kezd el viselkedni). Természetesen a másik két játékos elég hamar rájön erre, és gyorsan reagálnak erre egy új stratégiával. Mi fog történni?

Rövid gondolkodás után észrevehetjük, hogy ha se”B”, se „C” nem mond egyest, akkor biztosan veszítenek. Vagyis lényegében az a kérdés, hogy mondjanak-e egyest, vagy sem. Az alábbi táblázatok mutatnak néhány kézenfekvő lehetőséget. Azt még feltételezzük, hogy „B”és „C” szerepe szimmetrikus, ezért ugyanazzal a stratégiával játszanak
.

	A	B	C
1	1	1	1
2	0	0	0
3	0	0	0

Ha így játszunk, akkor a vereséget elkerülhetjük, hiszen minden meccsen döntetlen születik.

	A	B	C
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	0	0	0

Ebben az esetben:P(A)=PB)=PC)=$\frac{1}{4}$
A játék így is igazságos, csak most sokkal érdekesebb, mert csak a játszmáknak kb az egy negyede lesz döntetlen. Így a véletlen szeszélye folytán akár igen érdekes eredmények is születhetnek.
Nézzük egy kicsit általánosabban.

	A	B	C
1	1	p	P
2	0	1-p	1-p
3	0	0	0

$P(A)=1(1-p)^2$, $P(B)=P(C)=p(1-p)$, $P(\varnothing)=p^2$.
Ez egy teljes eseményrendszer. $P(A)+P(B)+P(C)+P(\varnothing)=(1-p)^2+2p(1-p)+p^2=1$
$M(B)=M(C)=2P(B)-P(C)-P(A)+0P(\varnothing)=P(B)-P(A)=p(1-p)-(1-p)^2=-2p^2+3p-1=-2(p-\frac{3}{4})^2+\frac{1}{8}$
Ez azt jelenti, hogy ha $\frac{3}{4}$ valószínűséggel mondunk egyet, akkor hosszabb távon átlagosan $\frac{1}{8}$ egységet nyernek játékonként. Ez a maximum, amit ebből a szituációból ki lehet hozni. Azért ez egy törékeny egyensúly. Ha a B, vagy C úgy dönt, hogy kilép a mindkét fél számára előnyös szituációból, és elkezd állandóan kettest mondani, akkor rövid-távon elég nagy haszonra tesz szert.

	A	B	C
1	1	0	
2	0	1	
3	0	0	0

P(A)= , P(B)= , P(C)=0.

M(A)=- , M(B)= , M(C)=-1.

Nagy csábítás, az előzőhöz képest. Ha A és B nem változtat ezen a stratégián, Akkor C soha nem nyer. Viszont Ő dönti el, hogy a másik kettő közül ki nyerjen. Ezzel hosszabb távon rá tudja venni őket a stratégiájuk feladására.

4. feladat

Vizsgáljuk meg az előző problémát négy játékos esetén is! Természetesen itt a győztes szintén mindenkitől egy egységet fog kapni, vagyis három egységet. Tehát az A mindig egyest mond, és feltételezzük, hogy B, C és D egységesen óhajt fellépni a dúvaddal szemben.

Itt egy kicsit más a helyzet. A három játékos (B, C, D,) szerepe továbbra is szimmetrikus. Ha nem mondanak egyet, akkor közöttük egy szimmetrikus játék lesz. Tehát az 1-p valószínűséget egyenletesen osztják el a maradék három számon.

	A	B	C	D
1	1	p	p	p
2	0	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$
3	0	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$
4	0	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{1-p}{3}$

$P(A)=(1-p)^3$,

$P(B)=P(C)=P(D)= (\frac{1-p}{3})p^2+\frac{1-p}{3}(p^2+2p\frac{1-p}{3})+\frac{1-p}{3}(p^2+2p2\frac{1-p}{3})=$

$\frac{1-p}{3}p(p+p+2\frac{1-p}{3}+p+4\frac{1-p}{3})=\frac{1}{3}p(1-p)(2+p)$

$P(\emptyset)=p^3+p(1-p)^2$

Könny

$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(\emptyset)=(1-p)^3+3\frac{1}{3}p(1-p)(2+p)+[\,p^3+p(1-p)^2]=1$

$M(B)=3P(B)-P(A)-P(C)-P(D)=P(B)-P(A)=$

$\frac{1}{3}p(1-p)(2+p)-(1-p)^3=\frac{1}{3}(1-p)(-2p^2+8p-3)=\frac{1}{3}(2p^3-10p^2+11p-3)$

Ha p=0, akkor M(B)=-1, ha p=1, akkor M(B)=0

A [0;1] intervallumon értelmezett függvénynek az abszolút maximuma vagy az intervallum szélén van, vagy ott, ahol a derivált nulla.

$M'(B)=\frac{1}{3}(6p^2-20p+11)=0$, Ennek az egyenletnek a [0;1]-be eső gyöke:

$P=\frac{20\pm\sqrt{136}}{12}$, $p_1\approx0,6948$, $M(B)\approx0,162$

A kapott valószínűség kevesebb az előbb kapott -nél, vagyis mivel hárman vannak, ezért elegendő p=0,6948 valószínűséggel egyet mondaniuk, hogy hosszabb távon nyerjenek A-tól.
Mivel M(B)=M(C)=M(D)=0,162, ezért M(A)=-3x0,162=-0,486, ami majdnem fél dolláros veszteséget jelent játékonként.

5. feladat

Nézzük meg, hogy mit tehet valaki, ha sikerült kiismernie a másik két játékos taktikáját. Tételezzük fel, hogy az „A” játékos eltér a kényelmes egyharmad, egyharmad, egyharmad taktikától és egy kicsit többször kezd egyest mondani a táblázatban leírtak szerint. A „B” játékos marad az eredeti taktikánál. A „C” legjobb válaszának meghatározása érdekében bevezetünk két új változót. Tegyük fel, hogy „p” valószínűséggel mond egyet, és „q”-val kettest. Ezek után nyilvánvaló, hogy (1-p-q) valószínűséggel mond hármast. Továbbá p≥0 és q≥0.

	A	B	C
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p
2		$\frac{1}{3}$	q
3		$\frac{1}{3}$	1-p-q

A harmadik feladatnál megismert képletet alkalmazva:

P(A)= - p- q

P(B)= p+ q

P(C)=- + p- q

M(C)=2P©-P(A)-P(B)=- + p- q
Az M(C)-re kapott kifejezés maximumát kell megkapnunk a megadott feltételek mellett.
Ez egy sík egyenlete. Ha a kifejezés maximumára vagyunk kíváncsiak, elegendő a megadott értelmezési tartomány szélein megnézni hogyan viselkedik.

M(p,q)=- + p- q, M(0;0)=- , M(1;0)= , M(0;1)=- .

Ez azt jelenti, hogy C akkor jár a legjobban, ha mindig egyest mond, így játékonként átlagosan dollár nyereségre tehet szert.
További kérdések:

1. Hogyan járjunk el, ha a játékoknak kb 70%-ában szeretnénk egyest mondani, 20%-ban kettest és 10 %-ban egyest?
2. Van-e a játéknak olyan stabil helyzete, amiből senkinek nem érdemes kilépnie?

Békéscsaba 2013 július Juhász István